Ασκηση

$S: C[0,1] \to \mathbb{R}$ τυπου
$S(f) = f(0) + f(1)$
να δείξετε οτι S φραγμένος γραμμικος τελεστής και να υπολογισετε $\|S\| = ;$

Λύση

T γραμμικος (προφανες)
$|T(f)| = |f(0) + f(1)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$
Αρα, $T \in C[0,1]^*$ με $\|T\| \leq 2$
Η σταθερή συνάρτηση $f(t) = 1$, $t \in [0,1]$

ανήκει στο $C[0,1]$, $\|f\|_\infty = 1$

$$\|T\| \geq \frac{|T(f)|}{\|f\|_\infty} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Εαν τωρα είχαμε ως δεδομένο τελεστη τον:

$S(f) = f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1)$

S γραμμική

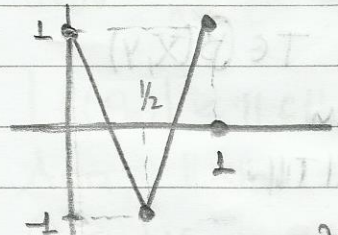
$|S(f)| = |f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1)| \leq |f(0)| + |f(\frac{1}{2})| + |f(1)| \leq$

$\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 3\|f\|_\infty$

Τοτε, $S \in C[0,1]^*$ με $\|S\| \leq 3$.

Μια συνεχής συνάρτηση $f: C[0,1] \to \mathbb{R}$

ετσι ωστε $f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1) = 3$ είναι



$$f(t) = \begin{cases} 1-4t, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ 4t-3, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Επομένως, f συνεχής, $\|f\|_\infty = 1$

και $\|S\| \geq \frac{S(f)}{\|f\|_\infty} = \frac{f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1)}{1} = 3$

Αρα, $\|S\| = 3$.

Παράδειγμα:

$T: C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$ οπου $T(f) = f'$

T γραμμικος;

T φραγμένος;

ΛΥΣΗ

T γραμμικος αφου $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

T ~~οχι~~ φραγμενος τελεστής αφου $\forall n \in \mathbb{N}$

θεωρούμε $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^n$

$f_n \in C^\infty[0,1]$, $\|f\|_\infty = 1$, $f'(x) = n x^{n-1}$

$\|T(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty = n$. Αρα, $\sup\left\{\frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}, f \in C^\infty[0,1]\right\}$

$\geq \sup\left\{\frac{\|Tf_n\|_\infty}{\|f_n\|_\infty}, n = 1, 2, \ldots\right\} = \sup\{n, n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Παράδειγμα:

Έστω $T: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ τύπου

$T((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$

(τελεστής της προς τα πίσω μετατόπισης)

Ο T είναι γραμμικός τελεστής (προφανές)

$\forall \underset{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{x} \in \ell^2(\mathbb{N}) : \|T(x)\|_2 = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$

Συνεπώς, T φραγμένος με $\|T\| \leq 1$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ με $\|e_2\|_2 = 1$, $Te_2 = e_1$

$\|T\| \geq \dfrac{\|Te_2\|_2}{\|e_2\|_2} = \dfrac{\|e_1\|_2}{\|e_2\|_2} = 1$

Συνεπώς, $\|T\| = 1$.

Πρόταση:

Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα. Αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ τότε η σύνθεση $S \circ T \in \mathcal{B}(X, Z)$ και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

Απόδειξη

$S \circ T$ γραμμικός ως σύνθεση γραμμικών

Θδο $S \circ T$ φραγμένος : $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

$\forall x \in X : \|S \circ T(x)\| = \|S(T(x))\| \overset{S\ \varphi\rho.}{\leq} \|S\| \, \|T(x)\| \overset{T\ \varphi\rho.}{\leq}$

$\leq \underbrace{\|S\| \cdot \|T\|}_{\sigma\tau\alpha\theta.\ \in\mathbb{R}} \cdot \|x\| \Longrightarrow \|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

Παραδείγματα Δυϊκών Χώρων

1). $(\ell^1(\mathbb{N}))^*$ ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^\infty(\mathbb{N})$

1ο βήμα: $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ και ορίζουμε $f : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ τύπου $f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$

Τότε, θδο f γραμμική & συνεχής (δηλ. $\in \ell^1(\mathbb{N})^*$) και $\|f\| \leq \|x\|_\infty$

Παρατήρηση:

Αν X, Y χώροι με νόρμα και $T, S \in \mathcal{B}(X,Y)$, E ολικό υποσύνολο του X ώστε $T(x)=S(x)$, $\forall x \in E$ τότε $T(x)=S(x)$, $\forall x \in X$

Αποδ.

T, S γραμμικοί $\Rightarrow T(x)=S(x)$ για κάθε $x \in span(E)$ και λόγω συνέχεια) επ. τοι: $T(x)=S(x)$ για κάθε $x \in \overline{span E} \overset{\text{ολικό}}{=} X$

Εξετάζουμε αν η f είναι καλά ορισμένη δηλ. αν η σειρά συγκλίνει ή όχι $\forall x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ και $\forall y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1 < \infty \rightarrow \text{Συγκλίνει}$$

Δηλαδή, $|f(y)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1$

Άρα, $f \in \mathcal{B}(\ell^1(\mathbb{N}), \mathbb{R}) = (\ell^1(\mathbb{N}))^*$

2º βήμα: Αν $f \in \ell^1(\mathbb{N})^*$ και ορίσουμε την ακολουθία $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $e_n = (0,0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1},0,\dots,0) \in \ell^1(\mathbb{N})$ τότε

Θδο $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$: $\|x\|_\infty = \|f\|$ και ισχύει ότι $\forall y \in \ell^1(\mathbb{N})$

$f(y) = \sum_{n=1} f(e_n) \cdot y_n$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$

$|f(e_n)| \leq \|f\| \cdot \|e_n\|_1 = \|f\|$

Άρα, $\|x\|_\infty \leq \|f\|$

Θέτουμε, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) \cdot y_n$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$

Αλλά από το 1º βήμα έχουμε $g \in (\ell^1(\mathbb{N}))^*$: $\|g\| \leq \|x\|_\infty$

Αρκεί νδο το $g = f$ και έτσι θα έχουμε ότι: $\|f\| = \|g\| = \|x\|_\infty$

Από την παρατήρηση πάνω οι συναρτήσεις f και g ταυτίζονται σε ένα ολικό υποσύνολο του $\ell^1(\mathbb{N})$

Άρα, θα ταυτίζονται παντού.

(Δηλ. $g(e_n) = f(e_n)$, $n = 1, 2, \dots$ και $E = \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ είναι ολικό $\subseteq \ell^1(\mathbb{N})$)

Συνεπώς, δείξαμε ότι $\|f\| = \|g\| = \|x\|_\infty$

3º βήμα:

Ορίζουμε $T: \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow (\ell^1(\mathbb{N}))^*$ όπου

$T(x)(y) = \sum_{n=1} x_n y_n$ καλά ορισμένος, $\forall x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$
$\forall y = (y_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$

T γραμμικός
T επί διότι αν $f \in \ell^1(\mathbb{N})^*$ τότε
(από το 2ο βήμα) $f = T(x)$ με $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$
και $\|T(x)\| = \|x\|_\infty$ $\forall x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$
Άρα, T ισομετρικός ισομορφισμός

2) $(C_0(\mathbb{N}))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^1(\mathbb{N})$

<u>1ο βήμα:</u>
Αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ και θέτουμε $f: C_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$
με $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{N})$
τότε ΘΔο $f \in (C_0(\mathbb{N}))^*$ και $\|f\| \le \|x\|_1$
Εξετάζουμε αν η f είναι καλά ορισμένη
$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \|y\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1 < \infty$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{N})$
Επομένως, η f είναι καλά ορισμένη
Η f επίσης γραμμική και:
$|f(y)| = |\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \overset{\text{όπου}}{\le} \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$
τότε το $f \in \mathcal{B}(C_0(\mathbb{N}), \mathbb{R}) = (C_0(\mathbb{N}))^*$
με $\|f\| \le \|x\|_1$

<u>2ο βήμα:</u>
Αν $f \in (C_0(\mathbb{N}))^*$ και θέτουμε $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε ΘΔο
$x \in \ell^1(\mathbb{N})$ και $\|x\|_1 = \|f\|$ και
$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) y_n$ $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{N})$
Ορίζουμε το $z_n = \begin{cases} \frac{|f(e_n)|}{f(e_n)}, & \text{Αν } f(e_n) \ne 0 \\ 0, & \text{Αν } f(e_n) = 0 \end{cases}$

$\forall m \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)| = \sum_{n=1}^{m} z_n f(e_n) =$
f γραμμ. $= f(\sum_{n=1}^{m} z_n e_n) \le \|f\| \cdot \|\underbrace{\sum_{n=1}^{m} z_n e_n}_{(z_1, z_2, \dots, z_n, 0, 0, \dots)}\|_\infty \le \|f\|$
$\left\{ \begin{matrix} 0, & \text{αλλιώς} \\ 1, & f(e_n) \ne 0 \end{matrix} \right.$, $\forall n \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \le \|f\|$$

Άρα, $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ και $\|x\|_1 \le \|f\|$

Από το 1º βήμα ορίζονται $g: c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ τύπου $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) y_n$ έχουμε $g \in (c_0(\mathbb{N}))^*$ με $\|g\| \le \|x\|_1$. Αρκεί νδο $g = f$ το οποίο ισχύει αφού $g(e_n) = f(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και το $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ ολικό. Επομένως, $\|g\| = \|f\| = \|x\|_1$

3º Βήμα:

Ορίζουμε $T: \ell^1(\mathbb{N}) \to (c_0(\mathbb{N}))^*$ με τύπο:

$$T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}), \ \forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$$

όπου T καλά ορισμένη και T επί, διότι αν $f \in (c_0(\mathbb{N}))^*$ και ορίσουμε $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε $f = T(x)$.

Τέλος, $\|T(x)\| = \|x\|_1$, $\forall x \in \ell^1(\mathbb{N})$

3) Αν $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (συζυγείς εκθέτες) τότε $(\ell^p(\mathbb{N}))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^q(\mathbb{N})$

1º Βήμα:

Αν $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$ και ορίσουμε $f: \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ τότε ΘΔΟ $f \in (\ell^p(\mathbb{N}))^*$ και $\|f\| \le \|x\|_q$

2º Βήμα:

Αν $f \in (\ell^p(\mathbb{N}))^*$ και θέσουμε $x = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ τότε ΘΔΟ $x \in \ell^q(\mathbb{N})$, $\|x\|_q = \|f\|$ και $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) y_n$ για κάθε $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$

Αποδεικνύουμε λοιπόν τα βηματα ένα προς ένα apoδ. (1º βήμα)

$$\sum |x_n y_n| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum |x_n|^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum |y_n|^p\right)^{1/p} = \|x\|_q \cdot \|y\|_p$$

Άρα, η f καλά ορισμένη:

$$|f(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| = \|x\|_q \cdot \|y\|_p$$

Άρα, $f \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}), \mathbb{R}) = (\ell^p(\mathbb{N}))^*$ με $\|f\| \leq \|x\|_q$

apoδ. (2º βήμα)

Θέτουμε ως: $z_n = \begin{cases} \dfrac{|f(e_n)|^q}{f(e_n)}, & \text{αν } f(e_n) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } f(e_n) = 0 \end{cases}$

$\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)|^q = \sum_{n=1}^{m} z_n f(e_n) = f\left(\sum_{n=1}^{m} z_n e_n\right) \leq \|f\| \cdot \left\|\sum_{n=1}^{m} z_n e_n\right\|_p$$

$$= \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p\right)^{1/p} = \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)|^{(q-1)p}\right)^{1/p} =$$

$$\overset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{=} \|f\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)|^q\right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} |f(e_n)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\| \Rightarrow \|x\|_q \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow x \in \ell^q(\mathbb{N})$$

Ορίζουμε $g: \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $\forall y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ τότε $g = f$ αφού ισχύει $g(e_n) = f(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ ολικό

και έπειτα ορίζουμε:

$T: \ell^q(\mathbb{N}) \to (\ell^p(\mathbb{N}))^*$ με $T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $\forall x \in \ell^q$, $\forall y \in \ell^p$

τότε από 1º βήμα $\Rightarrow$ Τ καλά ορισμένος γραμ. τελ.

απο το $2^{ο}$ βήμα $\Rightarrow$ T επι και αρα
$\|T(x)\| = \|x\|_q$

Παρατηρήσεις

(A) Και στα 3 παραδείγματα
1) $T: \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \to (\ell^{1}(\mathbb{N}))^*$
2) $T: \ell^{1}(\mathbb{N}) \to (c_0(\mathbb{N}))^*$
3) $T: \ell^{q}(\mathbb{N}) \to (\ell^{p}(\mathbb{N}))^*$

δίνεται από τον τύπο
$T(x)(y) = \sum x_n y_n$ και $T^{-1}(f) = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$

(B) $X \sim Y$ όταν X, Y ισομετρικά ισόμορφοι
$X \sim Y$ τότε $X^* \sim Y^*$ (Άσκηση)
Έτσι, $(c_0(\mathbb{N}))^* \sim \ell^{1}(\mathbb{N}) \Rightarrow$
$\Rightarrow c_0(\mathbb{N})^{**} \sim (\ell^{1}(\mathbb{N}))^* \sim \ell^{\infty}(\mathbb{N})$
Επίσης, $(\ell^{p}(\mathbb{N}))^* \sim \ell^{q}(\mathbb{N}) \Rightarrow (\ell^{p}(\mathbb{N}))^{**} \sim (\ell^{q}(\mathbb{N}))^* \sim$
$\sim \ell^{p}(\mathbb{N})$

Για $p=2$ έχουμε ότι
$(\ell^{2}(\mathbb{N}))^* \sim \ell^{2}(\mathbb{N})$ (αφού $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)

Ασκήσεις

Έστω X χώρος με νόρμα
Θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς
$S(x,\varepsilon) = \{y\in X : \|y-x\| < \varepsilon\}$
$B(x,\varepsilon) = \{y\in X : \|y-x\| = \varepsilon\}$
$S_X = \{x : \|x\| = 1\}$
$B_X = \{x : \|x\| \leq 1\}$

(1) Αν $X \neq \{0\}$ τότε ο X έχει μεμονωμένα σημεία

Αποδ

Έστω τυχόν $x\in X$ και θδο $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \neq x : x_n \to x$

Αν $x \neq 0$, θέτουμε $x_n = (1+\frac{1}{n})x$

$\|x_n - x\| = \|\frac{1}{n} x\| = \frac{1}{n}\|x\| \longrightarrow 0$

Αν $x = 0$, επιλέγουμε $y \neq 0$ και θέτουμε

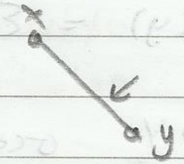
$x_n = \frac{1}{n} y \longrightarrow 0$

② Αν $x, y \in X$ με $\|x-y\| = \varepsilon$ τότε

α. $\exists (y_n)$ στο X με $\|x-y_n\| < \varepsilon$ με $y_n \to y$

β. $\exists (z_n)$ στο X με $\|x-z_n\| > \varepsilon$ με $z_n \to y$

Απάντ.



α) $y_n = x + (1+\frac{1}{n})(y-x) \xrightarrow{n\to\infty} x$

$\|y_n - x\| = (1-\frac{1}{n})\|y-x\| = (1-\frac{1}{n})\cdot\varepsilon < \varepsilon$

β) $z_n = x + (1+\frac{1}{n})(y-x) \longrightarrow y$

$\|z_n - x\| = (1+\frac{1}{n})\varepsilon > \varepsilon$

Παραδοση εως πέμπτη 10/11/2016

Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση

1. Fréchet Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι $T : X \to Y$ γραμμικός και $A \subset X$ ώστε το το $T(A)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
(α) Δείξτε ότι αν ο T είναι $1-1$ στο A τότε το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
(β) Δείξτε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι το (α) δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι το ο T είναι $1-1$ στο A. (Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε κατάλληλη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.)

2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \ \|x\| < 1\}$.

3. Έστω $X = (C[0,1], \| \ \|_\infty)$. Θεωρούμε τις $F, G : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(f) = \int_0^1 f(t)dt - f(\frac{1}{2})$ και $G(f) = f(0) - f(\frac{1}{2}) + f(1)$. Να δείξετε ότι $F, G \in C[0,1]^*$ και να υπολογίσετε τις νόρμες τους.

4. Ορίζουμε $T, S : C[0,1] \to C[0,1]$ με $T(f)(t) = t\int_0^1 f(s)ds$ και και $S(f)(t) = tf(t)$.
(α) Να δείξετε ότι οι T, S είναι καλά ορισμένοι, γραμμικοί και φραγμένοι.
(β) Να εξετάσετε αν $T \circ S = S \circ T$.
(γ) Να υπολογίσετε τις νόρμες των τελεστών $T, \ S, \ T \circ S, \ S \circ T, \ T \circ T, \ S \circ S$.

5. Ορίζουμε $X = (c_{00}(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$, $Y = (c_{00}(\mathbb{N}), \| \ \|_2)$. Αν T είναι ο ταυτοτικός τελεστής του $c_{00}(\mathbb{N})$ να εξετάσετε αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και αν $T \in \mathcal{B}(Y, X)$.

6. Έστω $0 < \lambda < 1$. Ορίζουμε $T : \ell^1 \to \ell^1$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5, \dots)$$

(α) Να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος και να υπολογίσετε τη νόρμα του.
(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπολογίσετε τη νόρμα του T^n όπου $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$ (n φορές).
(γ) Να εξηγήσετε γιατί η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ (όπου $T^0 = I$) συγκλίνει.
(δ) Να υπολογίσετε τη νόρμα του τελεστή $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

7. Θεωρούμε το χώρο $c = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : \ \text{το όριο } \lim x_n \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R}\}$.
(α) Να δείξετε ότι ο c είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ^∞.
(β) Να δείξετε οτι οι χώροι c, c_0 είναι (γραμμικά) ισομορφικοί.
(Υπόδειξη: $T : c \to c_0$ με $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lim x_n, \ x_1 - \lim x_n, \ x_2 - \lim x_n, \ \dots)$).